CHỦ ĐỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Hàm số liên tục tại một điểm

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số f được gọi **là liên tục** tại điểm x_0 nếu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm x_0 và điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$
- Theo định nghĩa trên, hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ là liên tục tại điểm $x_0 \in (a;b)$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

2) Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

- Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$được gọi là liên tục trên khoảng đó, nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$được gọi là liên tục trên đoạn đó, nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ (liên tục bên phải tại a và bên trái tại b)

Chú ý:

- Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

- Tính liên tục của một hàm số:

  - **Tổng, hiệu, tích, thương** của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0)
  - **Hàm đa thức** và **hàm phân thức hữu tỉ** liên tục trên tập xác định của chúng.
  - Các hàm $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên tập xác định của chúng.

3) Tính chất của hàm số liên tục

- **Định lí:** (Định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = M$.

- **Hệ quả 1**: Nếu hàm f liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- **Hệ quả 2**: Nếu hàm f liên tục trên $[a;b]$ và $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $[a;b]$thì hàm số f có dấu không đổi trên $[a;b]$.

II. PHÂN DẠNG TOÁN VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

- **Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm**

Để xét sự liên tục của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm tại x_0 ta thực hiện các bước :

- **Bước 1 :** Tính $f\left(x_0\right)$
- **Bước 2 :** Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ (trong nhiều trường hợp để tính $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)$
- **Bước 3 :** So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ và $f\left(x_0\right)$ rồi rút ra kết luận.

Chú ý : *hàm số không liên tục tại x_0 thì được gọi là gián đoạn tại x_0*

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra :

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1} & khi\ x\ne 1\\ -1 & khi\ x=1\end{cases}$ (tại $x=1$)

b) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & khi\ x\ne 1\\ \dfrac{1}{4} & khi\ x=1\end{cases}$ (tại $x=1$)

<u>*Lời giải:*</u>

$a)$ Ta có: $f\left(-1\right)=\dfrac{-1+3}{-1-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+3}{x-1}=-1=f\left(-1\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=-1$

$b)$ Ta có : $f\left(1\right)=\dfrac{1}{4}$.

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{\left(x-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=f\left(1\right)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & khi\ x\ne 2\\ 1 & khi\ x=2\end{cases}$ (tại $x=2$)

b) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & khi\ x>5\\ \left(x-5\right)^2+3 & khi\ x\le 5\end{cases}$ (tại $x=5$)

<u>*Lời giải:*</u>

$a)$ Ta có: $f\left(2\right)=1$

Mà $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(-x^2+3x-1\right)}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+3x-1}{\left(x-1\right)}=1=f\left(2\right)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$

$b)$ Ta có: $f(5)=(5-5)^2+3=3$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left[(x-5)^2+3\right]=3$

Và $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=3$

Từ đó $f(5)=\lim\limits_{x\to 5} f(x)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=5$.

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & khi\ x\le 0\\ \sqrt{x+1} & khi\ x>0\end{cases}$ (tại $x=0$)

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$ (tại $x=1$)

<u>*Lời giải:*</u>

$a)$ Ta có: $f(0)=1-\cos 0=0$.

Lại có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)\end{cases}$ nên không tồn tại giới hạn hàm số tại $x=0$

Vậy hàm số không liên tục tại $x=0$.

$b)$ Ta có: $f(1)=-2.1=-2$.

Lại có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{2-x}+1}{-1}=-2\end{cases}$

Rõ ràng $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

Ví dụ 4. Tìm m,n để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2 & khi\ x<1\\ 2mx-3 & khi\ x\ge 1\end{cases}$ (tại $x=1$)

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\ne 1\\ 3x+m & khi\ x=1\end{cases}$ (tại $x=1$)

<u>*Lời giải*</u>

$a)$ Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$

Lại có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2mx-3)=2x-3$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 2x-3=1\Leftrightarrow x=2$

$b)\ \lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+2)=3$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3=3+m\Leftrightarrow m=0$

Ví dụ 5. Tìm m,n để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases} m & khi\ x=1 \\ \dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & khi\ x\ne0, x\ne3 \\ n & khi\ x=3 \end{cases}$ (tại $x=0$ và $x=3$)

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\ne2 \\ m & khi\ x=2 \end{cases}$ (tại $x=2$)

Lời giải

$a)$ Khi $x\ne0; x\ne3$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)}=\dfrac{x+2}{x}$

$+)\ \lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} m=m$

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x=0\Rightarrow m=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\infty$

$+)\ \lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3} n=n$

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x=3\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+2}{x}=\lim\limits_{x\to3}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{5}{3}$

$b)\ \lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+1)=3$

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x=0\Rightarrow m=3$

- **Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, đoạn**

- Để chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
- Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
- Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1} & khi\ x\neq -1\\ \dfrac{4}{3} & khi\ x=-1\end{cases}$ b) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-3x+4 & khi\ x<2\\ 5 & khi\ x=2\\ 2x+1 & khi\ x>2\end{cases}$

Lời giải

$a)$ $\lim\limits_{x\to -1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1+\left(x+1\right)}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(1+\dfrac{1}{x^2-x+1}\right)=\dfrac{4}{3}$

Do đó, hàm số này liên tục tại $x=-1$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-3x+4\right)$ =2; $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x+1\right)=5$

Mà $f\left(x\right)=5$ khi $x=2$ nên $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}f\left(x\right)\neq \lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)$

Do đó, hàm số đã cho liên tục khi $x\geq 2$

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ -4 & khi\ x=-2\end{cases}$ b) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x\neq \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & khi\ x=\sqrt{2}\end{cases}$

Lời giải

$a)$ Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục với $\forall x\neq -2$ (1)

$$\lim_{x\to -2}f\left(x\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\left(x-2\right)=-2-2=-4.$$

$f\left(-2\right)=-4\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}f\left(x\right)=f\left(-2\right)\Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$b)$ Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục với $\forall x\neq \sqrt{2}$ (1)

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}f\left(x\right)=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

$f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{2}}f\left(x\right)=f\left(\sqrt{2}\right)\Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục tại $x=\sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq -2\\ m & khi\ x=-2\end{cases}$ b) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+x & khi\ x<1\\ 2 & khi\ x=1\\ mx+1 & khi\ x>1\end{cases}$

Lời giải

$a)$ Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 2$.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ $\quad (1)$

Ta có $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 2 + 1 = 3; f(2) = m.$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3 = m \Leftrightarrow m = 3$.

$b)$ Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}(mx+1) = m+1;\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}(x^2 + x) = 1 + 1 = 2; f(1) = 2.$

YCBT $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1.$

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & khi\ x \neq 1 \\ 3x + m & khi\ x = 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & khi\ x < 1 \\ 2mx - 3 & khi\ x \geq 1 \end{cases}$

<u>Lời giải</u>

$a)$ Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 1$.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ $\quad (1)$

Ta có $f(1) = 3.1 + m = m + 3$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x^2 + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3 = m + 3 \Leftrightarrow m = 0.$

$b)$ Ta có $f(1) = 2m.1 - 3 = 2m - 3.$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}(2mx - 3);\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1.$

YCBT $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m - 3 = 1 = 2m - 3 \Leftrightarrow m = 2.$

- **Dạng 3. Ứng dụng tính liên tục trong giải phương trình**

- Biến đổi phương trình về dạng: $f(x) = 0$
- Tìm hai số a, b sao cho $f(a).f(b) < 0$ (Dùng chức nắng TABLE của máy tính (Mode 7) tìm cho nhanh)
- Chứng minh $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ từ đó suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm

Chú ý :

- Nếu $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a;b]$

- Để chứng minh $f(x)=0$ có ít nhất n nghiệm trên $[a;b]$, ta chia đoạn $[a;b]$ thành n khoảng nhỏ rời nhau, rồi chứng minh trên mỗi khoảng đó phương trình có ít nhất một nghiệm.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3-3x+1=0$ b) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Lời giải:

$a)$ Dễ thấy hàm $f(x)=x^3-3x+1$ liên tục trên R.

Ta có:

- $\begin{cases} f(-2)=-1 \\ f(-1)=3 \end{cases} \Rightarrow f(-2).f(-1)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_1\in(-2;-1): f(a_1)=0(1)$.
- $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_2\in(0;1): f(a_2)=0(2)$.
- $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=3 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_3\in(1;2): f(a_3)=0(3)$.

Do ba khoảng $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ đôi một không giao nhau nên phương trình $x^3-3x+1=0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

Mà phương trình bậc 3 thì chỉ có tối đa là 3 nghiệm nên $x^3-3x+1=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

$b)$ Đặt $\sqrt[3]{1-x}=t \Leftrightarrow x=1-t^3 \Rightarrow 2t^3-6t+1=0$.

Xét hàm số $f(t)=2t^3-6t+1$ liên tục trên R.

Ta có: $\begin{cases} f(-2).f(-1)=-3.5<0 \\ f(0).f(1)=1.(-3)<0 \\ f(1).f(2)=-3.5<0 \end{cases} \Rightarrow$ tồn tại 3 số $t_1,\ t_2$ và t_3 lần lượt thuộc 3 khoảng đôi một không giao nhau là $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ sao cho $f(t_1)=f(t_2)=f(t_3)=0$ và do đây là phương trình bậc 3 nên $f(t)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ứng với mỗi giá trị $t_1,\ t_2$ và t_3 ta tìm được duy nhất một giá trị x thỏa mãn $x=1-t^3$ và hiển nhiên 3 giá trị này khác nhau nên PT ban đầu có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5-3x+3=0$ b) $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$

Lời giải:

$a)$ Xét $f(x)=x^5-3x+3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_1>0$ sao cho $f(x_1)>0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_2<0$ sao cho $f(x_2)<0$.

Từ đó $f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)<0 \Rightarrow$ luôn tồn tại một số $x_0 \in\left(x_2 ; x_1\right): f\left(x_0\right)=0$ nên phương trình $x^5-3x+3=0$ luôn có nghiệm.

$b)$ Xét $f(x)=x^4+x^3-3x^2+x+1$ liên tục trên R

Ta có: $f(-1)=-3<0$

$\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $a>0$ sao cho $f(a)>0$.

$\Rightarrow x^2-x-3=0$ nên luôn tồn tại một số $x_0 \in(0 ; a)$ thỏa mãn $f\left(x_0\right)=0$ nên phương trình $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$ luôn có nghiệm.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $\left(1-m^2\right)(x+1)^3+x^2-x-3=0$

b) $\cos x+m \cos 2x=0$

c) $m(2 \cos x-\sqrt{2})=2 \sin 5x+1$

<u>Lời giải:</u>

$a)$ Xét $\left[\begin{array}{l}m=1 \\ m=-1\end{array}\right.$. Phương trình có dạng $x^2-x-3=0$ nên PT có nghiệm

Với $\left\{\begin{array}{l}m \neq 1 \\ m \neq 1\end{array}\right.$ giả sử $f(x)=\left(1-m^2\right)(x+1)^3+x^2-x-3$

$f(x)$ liên tục trên R nên $f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$

Ta có $f(-1)=m^2+1>0;\ \mathrm{f}(0)=-1<0 \Rightarrow f(-1).\mathrm{f}(0)<0$

Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

$b)$ Đặt $f(x)=\cos x+m \cos 2x \Rightarrow f(x)$ liên tục trên R

Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0;\ \mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$

Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

$c)$ Đặt $f(x)=m(2 \cos x-\sqrt{2})-2 \sin 5x-1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên R

Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-1<0; f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$

Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm $x \in\left[0;\frac{1}{3}\right]$ với $a \neq 0$ và $2a+6b+19c=0$.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f(x)$ liên tục trên R

+) Nếu $c=0$ thì $f(x)=0$ có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

+) Nếu $c\neq 0$, ta có $f(0)=c$; $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{a}{9}+\dfrac{b}{3}+c=\dfrac{1}{18}(2a+6b+18c)=-\dfrac{c}{18}$

$\Rightarrow f(0).f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{c^2}{18}<0$. Do đó $f(x)=0$ có nghiệm trong $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

$a)$ Ta có: $f(0)=1-\cos 0=0$.

Lại có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x) \end{cases}$ nên không tồn tại giới hạn hàm số tại $x=0$

Vậy hàm số không liên tục tại $x=0$.

$b)$ Ta có: $f(1)=-2.1=-2$.

Lại có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{2-x}+1}{-1}=-2 \end{cases}$

Rõ ràng $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

Ví dụ 5. Cho các phương trình sau $x^4-x^3-3=0$, $x^5-16x^3+20=0$, $x^7+x^4-4=0$. Số phương trình có nghiệm là ?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải:

Hàm số $f(x)=x^4-x^3-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $(0;2)$.

Mà $f(0).f(2)<0\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$.

Hàm số $g(x)=x^5-16x^3+20$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $(3;5)$.

Mà $f(3).f(5)<0\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(3;5)$.

Hàm số $h(x)=x^7+x^4-4$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $(0;2)$.

Mà $f(0).f(2)<0\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$.

Như vậy cả ba phương trình đã cho đều có nghiệm. **Chọn D**

Ví dụ 6. Phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có số nghiệm là ?

A. 3 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 4

Lời giải:

Hàm số $f(x)=x^5-5x^3+4x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta kiểm tra được $f(-2).f\left(-\frac{2}{3}\right)<0; f\left(-\frac{3}{2}\right).f(0)<0; f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0; f\left(\frac{1}{2}\right).f(1); f(1).f(3)<0.$

Từ đó trên mỗi khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};0\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(1;3)$ thì $f(x)=0$ đều có ít nhất một nghiệm.

Mà $f(x)=0$ là phương trình bậc 5 nên nó có tối đa 5 nghiệm.

Do đó số nghiệm của phương trình là 5. **Chọn B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên

A. $[-4;3]$ **B.** $[-4;3)$ **C.** $(-4;3]$ **D.** $(-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$

Câu 2. Hàm số $f(x)=\frac{x^3+x\cos x+\sin x}{2\sin x+3}$ liên tục trên

A. $[-1;1]$ **B.** $[1;5]$ **C.** $\left(\frac{-3}{2};+\infty\right)$ **D.** $\mathbb{R}$

Câu 3. Cho hàm số xác định và liên tục trên R với $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1},\forall x\neq 1$. Tính $f(1)$

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3;3]$ với $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x},\forall x\neq 0.$

Tính $f(0)$

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 1 **D.** 0

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;+\infty)$ với $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}-2},x\neq 0$.

Tính $f(0)$

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Câu 6. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 7. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ 3x+m & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Câu 8. Tìm giá trị của tham số k để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} & khi\ x\ne 1\\ k+1 & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** 2 **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Câu 9. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & khi\ x\ne 3\\ m & khi\ x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3, m$ là tham số.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m\in\left(-3;0\right)$ **B.** $m\le -3$ **C.** $m\in\left[0;5\right)$ **D.** $m\in\left[5;+\infty\right)$

Câu 10. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & khi\ x\ne 0\\ m & khi\ x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$

A. $m\in\left(-2;-1\right)$ **B.** $m\le -2$ **C.** $m\in\left[0;5\right)$ **D.** $m\in\left[5;+\infty\right)$

Câu 11. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & khi\ x\ne 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$ liên tục trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ **B.** $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$ **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$

Câu 12. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin \pi x}{x-1} & khi\ x\ne 1\\ m & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. $-\pi$ **B.** π **C.** -1 **D.** 1

Câu 13. Biết rằng $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{\left(x-\pi\right)^2} & khi\ x\ne \pi\\ m & khi\ x=\pi\end{cases}$ liên tục tại $x=\pi$

A. $\dfrac{\pi}{2}$ **B.** $-\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$

Câu 14. Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3 & khi\ x=-1\\ \dfrac{x^4+4}{x^2+x} & khi\ x\ne -1; x\ne 0\\ 1 & khi\ x=0\end{cases}$ liên tục tại

A. Mọi điểm $x=0, x=1$

B. Mọi điểm $x\in \mathbb{R}$

C. Mọi điểm trừ $x=-1$

D. Mọi điểm trừ $x=0$

Câu 15. Số điểm gián đoạn của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}0,5 & khi\ x=-1\\ \dfrac{x\left(x+1\right)}{x^2-1} & khi\ x\ne -1; x\ne 1\\ 1 & khi\ x=1\end{cases}$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ \left(1-m\right)\text{x} & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. 2

B. 1

C. 0

D. 3

Câu 17. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x\in \left[0;4\right]\\ 1+m & \text{khi } x\in \left(4;6\right]\end{cases}$ liên tục trên $\left[0;6\right]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m<2$

B. $2\le m<3$

C. $3<m<5$

D. $m\ge 5$

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\left|x-1\right|} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right], a$ là tham số. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. a là một số nguyên

B. a là một số vô tỉ

C. $a>5$

D. $a<0$

Câu 20. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ -2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới dây đúng?

A. $f\left(x\right)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$

B. $f\left(x\right)$ không liên tục trên $\left(0;2\right)$

C. $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$

D. $f\left(x\right)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3\\ 1-a^2x & \text{khi } x\le 3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **C.** $-\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{4}{3}$

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2\\ a^2x+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\le 0\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$ **B.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-\infty;1\right)$

C. $f\left(x\right)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$ **D.** $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$

Câu 24. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } \left|x\right|\le 1\\ x-1 & \text{khi } \left|x\right|>1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số liên lục tại $x=-1$ **B.** Hàm số liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;1\right);\left(1;+\infty\right)$

C. Hàm số liên tục tại $x=1$ **D.** Hàm số liên tục trên khoảng $\left(-1;1\right)$

Câu 25. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x<1, x\ne 0\\ 0 & \text{khi } x=0\\ \sqrt{x} & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại

A. Mọi điểm $x\in\mathbb{R}$ **B.** Mọi điểm trừ $x=0$

C. Mọi điểm trừ $x=1$ **D.** Mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$

Câu 26. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3, x\ne 1\\ 4 & \text{khi } x=1\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\ge 3\end{cases}$. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại

A. Mọi điểm $x\in\mathbb{R}$ **B.** Mọi điểm trừ $x=1$

C. Mọi điểm trừ $x=3$ **D.** Mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$

Câu 27. Số điểm gián đoạn của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<0\\ x^2+1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 3x-1 & \text{khi } x>2\end{cases}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 28. Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x<1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \\ m^2x\text{-}1 & \text{khi } x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 29. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} -x\cos x & \text{khi } x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x\le 1 \\ x^3 & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Hàm số liên tục tại

A. Mọi điểm $x\in\mathbb{R}$ **B.** Mọi điểm trừ $x=0$

C. Mọi điểm trừ $x=1$ **D.** Mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$

Câu 30. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2 \\ 2x+a & \text{khi } x=2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. $\dfrac{15}{4}$ **B.** $-\dfrac{15}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 1

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0 \\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi } x\ge 0 \end{cases}$ liên tục tại $x=0$

A. $m=-1$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=0$

Câu 32. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x>2 \\ m^2x\text{-}4m+6 & \text{khi } x\le 2 \end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ mx-4 & \text{khi } x\le 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. $m=3$ **B.** $m=2$

C. $m=-2$ **D.** Không tồn tại m

Câu 34. Tìm m để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{x-2} & \text{khi } x\ge 2 \\ 5x-5m+m^2 & \text{khi } x<2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m=2;m=3$ **B.** $m=-2;m=-3$

C. $m=1;m=6$ **D.** $m=-1;m=-6$

Câu 35. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^{2016}+x-2}{\sqrt{2018x+1}-\sqrt{x+2018}} & \text{khi } x\neq 1\\ k & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm k để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=2\sqrt{2019}$ **B.** $k=\dfrac{2017\sqrt{2018}}{2}$ **C.** $k=1$ **D.** $\dfrac{2016}{2017}\sqrt{2019}$

Câu 36. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-2 & \text{khi } x\geq 1\\ \dfrac{2x+a}{x^2+1} & \text{khi } x<1\end{cases}$. Gía trị của a để hàm số liên tục tại $x_0=1$

A. 1 **B.** -2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 37. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x} & \text{khi } x<1\\ 1 & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng.

A. y liên tục phải tại $x=1$ **B.** y liên tục tại $x=1$

C. y liên tục trái tại $x=1$ **D.** y liên tục trên $\mathbb{R}$

Câu 38. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ a & \text{khi } x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$

A. $a=0$ **B.** $a=1$ **C.** $a=-1$ **D.** $a=2$

Câu 39. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt[3]{x}-x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ mx+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $-\dfrac{4}{3}$ **B.** $-\dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{2}{3}$

Câu 40. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. $m=0$ **B.** $m=6$ **C.** $m=4$ **D.** $m=2$

Câu 41. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$

A. $a=-\dfrac{3}{4}$ **B.** $a=\dfrac{4}{3}$ **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$ **D.** $a=\dfrac{3}{4}$

Câu 42. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $a=0$ **B.** $a=-1$ **C.** $a=2$ **D.** $a=1$

Câu 43. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ mx+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$, ($m$ là tham số). Giá trị m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là

A. $m=0$ **B.** $m=\dfrac{1}{2}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=1$

Câu 44. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=-1$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Câu 45. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x=1$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$

C. $y=\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$ **D.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$

Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{khi } x>2\\ -2ax+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x=2$

A. $a=2$ **B.** $a=1$ **C.** $a=-1$ **D.** $a=\dfrac{1}{2}$

Câu 47. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x>2\\ x^2+\mathrm{m} & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. $m=-1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=3$ **D.** $m=-6$

Câu 48. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ a & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm a để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$

A. 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 49. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+m & \text{khi } x\ge 2\\ 3x-1 & \text{khi } x<2\end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0=2$

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=0$ **D.** $m=3$

Câu 50. Tìm giá trị của tham số m sao cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-7x-6}{x-3} & \text{khi } x>3\\ x^2+5mx+2 & \text{khi } x\le 3\end{cases}$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m=7$ **B.** $m=3$ **C.** $m=2$ **D.** $m=0$

Câu 51. Giá trị của tham số m sao cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x>0\\ 2m-\dfrac{5}{4}x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$ là

A. 3 **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{8}$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$

Câu 52. Giá trị của tham số a sao cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$ là

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** $-\dfrac{1}{2}$

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\le 4\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-8$ hoặc $m=\dfrac{7}{4}$ **B.** $m=8$ hoặc $m=-\dfrac{7}{4}$

C. $m=-\dfrac{7}{4}$ **D.** $m=\dfrac{7}{4}$

Câu 54. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$, với m tham số thực. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Câu 55. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & \text{khi } x\ne\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & \text{khi } x=\sqrt{3}\end{cases}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau :

$\left(\text{I}\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=\sqrt{3}$.

$\left(\text{II}\right)$ $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=\sqrt{3}$.

$\left(\text{III}\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. Chỉ I và II. **B.** Chỉ I và III.

C. Cả I, II, III đều đúng. **D.** Chỉ II và III.

Câu 56. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 2m+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Với giá trị nào của m sau đây để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\geq 2\\ \left(1-m\right)x & \text{khi } x<2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 58. Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, \forall x>1\\ 6Px-3, \forall x\leq 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{5}{6}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Câu 59. Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}, & x\neq 1\\ 2ax-1 & x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

Tính $a-b$

A. 0 **B.** -1 **C.** -5 **D.** 7

Câu 60. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-\left(a-2\right)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi } x\neq 1\\ 8+a^2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=1$

A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 2

Câu 61. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+a-1, & \text{khi } x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=0$

A. $a=1$ **B.** $a=3$ **C.** $a=2$ **D.** $a=4$

Câu 62. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$

A. -8 **B.** 8 **C.** $-\dfrac{7}{4}$ **D.** $\dfrac{7}{4}$

Câu 63. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ 2m+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0=2$

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{13}{2}$ **C.** $\dfrac{11}{2}$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$

Câu 64. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+mx & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm m để hàm số đã cho liên tục tại $x=1$

A. $-\dfrac{3}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** 0 **D.** 2

Câu 65. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x\ne 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

A. $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=0$ **B.** $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$

C. $f\left(\sqrt{2}\right)<0$ **D.** $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=0$

Câu 66. Tìm a để các hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+\left(2a+1\right)x} & \text{khi } x\ne 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$

A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 1

Câu 67. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x}-m & \text{khi } x\ge 0\\ mx+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. 1 **B.** 0 **C.** -1 **D.** -2

Câu 68. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin \pi x & \text{khi } \left|x\right|\le 1\\ x+1 & \text{khi } \left|x\right|>1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại $x=\pm 1$

Câu 69. Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} & \text{khi } x>4\\ 3x-m & \text{khi } x\le 4\end{cases}$ liên tục tại $x_0=4$ khi m nhận giá trị là

A. 44 **B.** -20 **C.** 20 **D.** -44

Câu 70. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ a+2 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=4$

A. $a=\dfrac{5}{2}$ **B.** $a=-\dfrac{11}{6}$ **C.** $a=3$ **D.** $a=2$

Câu 71. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2} & \text{khi } x<2\\ a+\dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương $-x^2+ax+\dfrac{7}{4}>0$

A. 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Câu 72. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. $m=3$ **B.** $m=1$ **C.** $m=2$ **D.** $m=0$

Câu 73. Cho các mệnh đề:

(1). Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x_0)=0$.

(2). Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

(3). Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, đơn điệu trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên $(a;b)$.

Trong ba mệnh đề trên

A. Có đúng hai mệnh đề sai. **B.** Cả ba mệnh đề đều đúng.

C. Cả ba mệnh đề đều sai. **D.** Có đúng một mệnh đề sai.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$

C. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$

D. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$

Câu 75. Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Câu 76. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

Câu 78. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có bai nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$?

A. 19 **B.** 18 **C.** 4 **D.** 3

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BẢI TẬP TỰ LUYỆN

1-C	2-D	3-D	4-B	5-C	6-D	7-A	8-C	9-B	10-C
11-A	12-A	13-C	14-B	15-B	16-A	17-A	18-C	19-A	20-D
21-A	22-C	23-C	24-A	25-A	26-D	27-A	28-B	29-C	30-B
31-B	32-A	33-A	34-A	35-A	36-B	37-A	38-B	39-A	40-A
41-D	42-C	43-B	44-A	45-B	46-C	47-A	48-A	49-B	50-D
51-C	52-C	53-D	54-C	55-B	56-A	57-B	58-C	59-D	60-D
61-C	62-D	63-C	64-A	65-D	66-C	67-C	68-C	69-B	70-B
71-D	72-A	73-D	74-B	75-D	76-D	77-B	78-C		

Câu 1: Điều kiện $\begin{cases}3-x\ge 0\\ x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-4\\ x\le -3\end{cases}\Rightarrow D=(-4;3]\to$ hàm số liên tục trên $(-4;3)$.

Xét tại $x=3$, ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}=f(3)$

$\to$ Hàm số liên tục trái tại $x=3$. Vậy hàm số liên tục trên $(-4;3]$. **Chọn C**

Câu 2: Vì $2\sin x+3\ne 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\to D=\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn D**

Câu 3: Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$. **Chọn D.**

Câu 4: Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ nên suy ra

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **Chọn B.**

Câu 5: Vì $f(x)$ liên tục trên $(-4;+\infty)$ nên suy ra

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)=4$. **Chọn C.**

Câu 6: Tập xác định $D=\mathbb{R}$, chứa $x=2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$m=f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3.$ **Chọn D.**

Câu 7: Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết thì ta có $3+m=f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Suy ra $3+m=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)=3\Leftrightarrow m=0$. **Chọn A.**

Câu 8: Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D=[0;+\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương vợi

$k+1=y(1)=\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}.$ **Chọn C.**

Câu 9: Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $(-1;+\infty)$. Theo giả thiết thì ta phải có

$m=f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=-\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)=-4.$ **Chọn B.**

Câu 10: Với mọi $x\neq 0$, ta có :

$0\le |f(x)|=\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|\le x^2\to 0$ khi $x\to 0\to\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$

Theo giả thiết thì ta phải có: $m=f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$ **Chọn C.**

Câu 11: Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in Z\right\}.$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x}=1.\dfrac{1}{\cos x}=1\neq 0=f(0)\to f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Chọn A.

Câu 12: Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Điều kiện bài toán tương đương với

$m=f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x-\pi+\pi)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\sin\pi(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(-\pi).\dfrac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\right]$ (*).

Đặt $t=\pi(x-1)$ thì $t\to 0$ khi $x\to 1$. Do đó $(*)$ trở thành : $m=\lim\limits_{t\to 0}(-\pi).\dfrac{\sin t}{t}=-\pi.$ **Chọn A.**

Câu 13: Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điều kiện của bài toán trở thành:

$$m=f(\pi)=\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{(x-\pi)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^2\quad(*)$$

Đặt $t=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\to 0$ khi $x\to 1$. Khi đó $(*)$ trở thành: $m=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2=\dfrac{1}{2}.1^2=\dfrac{1}{2}.$ **Chọn C.**

Câu 14: Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

(1) Xét tại $x=-1,$ ta có

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3=f(-1).$$

$\to$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=-1.$

(2) Xét tại $x=0$, ta có

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}(x^2-x+1)=1=f(0).$$

$\to$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0$. **Chọn B.**

Câu 15: Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$.

(1) Xét tại $x=-1,$ ta có

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}=f(-1)$$

$\to$ Hàm số liên tục tại $x=-1.$

(2) Xét tại $x=1$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\end{cases}$

$\to$ Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **Chọn B.**

Câu 16: TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$. $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(2)=4m^2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[(1-m)x\right] \;=2(1-m) \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} m^2x^2=4m^2 \end{cases} \to (*) \Leftrightarrow 4m^2=2(1-m) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Chọn A.

Câu 17: Dễ thấy hàm số $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4, x=0, x=6$.

Tức là ta cần có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=f(6) \\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4) \end{cases}$ $(*)$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0 \\ f(0)=\sqrt{0}=0 \end{cases}$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(1+m)=1+m \\ f(6)=1+m \end{cases}$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(1+m)=1+m; \\ f(4)=1+m \end{cases}$

Khi đó $(*)$ trở thành $1+m=2 \Leftrightarrow m=1<2$. **Chọn A.**

Câu 18: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1,+\infty)$.

Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi nó liên tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \quad (*)$$

Ta có $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{khi } x>1 \\ a & \text{khi } x=1 \\ 2-x & \text{khi } x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1 \end{cases} \to (*)$ không thỏa mãn.

Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu. **Chọn C.**

Câu 19: Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1]$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(1) = a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)\right] = 4 \end{cases} \to (*) \Leftrightarrow a = 4.$ **Chọn A.**

Câu 20: Dễ thấy hàm số liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(-2x) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right] = -2 \end{cases} \to f(x)$ liên tục tại $x = 1$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 21: Điều kiện bài toán trở thành: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(3) = 1-3a^2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-2)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{1-x} = -3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-a^2x\right) = 1-3a^3. \end{cases}$

$\to (*) \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \to a_{\min} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$ **Chọn A.**

Câu 22: Ta cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(2) = 2a^2 - \dfrac{7}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(a^2x+\dfrac{1}{4}\right) = 2a^2-\dfrac{7}{4}. \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a = \pm 1 \to a_{\max} = 1.$ **Chọn C.**

Câu 23: Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Mà $\begin{cases} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)=1-\cos 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{0+1}=1 \end{cases} \to f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. **Chọn C.**

Câu 24: Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lại có $\begin{cases} f(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2 \end{cases} \to f(x)$ gián đoạn tại $x=-1$. **Chọn A.**

Câu 25: Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases} \to f(x)$ liên tục tại $x=0$

Lại có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1 \end{cases} \to f(x)$ liên tục tại $x=1$

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 26: Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$, $(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2 \end{cases} \to f(x)$ gián đoạn tại $x=1$

Lại có $\begin{cases} f(3)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \end{cases} \to f(x)$ gián đoạn tại $x=3$

Chọn D.

Câu 27: Hàm số $y=h(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(0;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} h(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0 \end{cases} \to f(x)$ không liên tục tại $x=0$

Lại có $\begin{cases} h(2)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+1\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$. **Chọn A.**

Câu 28: Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ $\quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(m^2x+1\right)=m^2+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=2 \end{cases} \to (*) \Leftrightarrow m^2+1=2$

$\Leftrightarrow m=\pm 1\to S=0$. **Chọn B.**

Câu 29: Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x\cos x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0 \end{cases} \to f(x)$ liên tục tại $x=0$

Lại có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^3=1 \end{cases} \to f(x)$ không liên tục tại $x=1$

Chọn C.

Câu 30: Ta có $f(2)=4+a, \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$ thì $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\Leftrightarrow 4+a=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=-\dfrac{15}{4}$. **Chọn B.**

Câu 31: Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=m+1$

Lại có: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x-1-x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\dfrac{-2}{2}=-1.$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0$ thì $m+1=-1\Leftrightarrow m=-2$. **Chọn B.**

Câu 32: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=2m^2-4m+6$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}+2\right)(x-1)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x+2}+2\right)(x-1)=4$

Do đó hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$ khi $2m^2-4m+6=4\Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0\Leftrightarrow m=1$. Vậy có 1 giá trị của m. **Chọn A**

Câu 33: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=2m-4$

Lại có : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+} x=2$

Để hàm số liên tục tại điểm $x=2$ thì $2m-4=2\Leftrightarrow m=3$. **Chọn A.**

Câu 34: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=4+2\sqrt{2-2}=4$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(5x-5m+m^2\right)=10-5m+m^2$

Hàm số liên tục với mọi $x\neq 2$, như vậy để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại điểm $x=2$ khi và chỉ khi $4=10-5m+m^2\Leftrightarrow m^2-5m+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=3\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 35: Ta có $f(1)=k$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2016}+x-2}{\sqrt{2018x+1}-\sqrt{x+2018}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^{2016}-1\right)+(x-1)}{\dfrac{2018x+1-x-2018}{\sqrt{2018x+1}+\sqrt{x+2018}}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1\right)+(x-1)}{2017(x-1)}\left(\sqrt{2018x+1}+\sqrt{x+2018}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1\right)+1}{2017}\left(\sqrt{2018x+1}+\sqrt{x+2018}\right)=\dfrac{2016+1}{2017}.2\sqrt{2019}=2\sqrt{2019}$

Do đó hàm số liên tục tại điểm $x=1\Leftrightarrow k=2\sqrt{2019}$. **Chọn A.**

Câu 36: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=0,\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+a}{x^2+1}=\dfrac{2+a}{2}$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì $0 = \dfrac{2+a}{2} \Leftrightarrow a = -2$. **Chọn B.**

Câu 37: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x^3}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-}(1+x+x^2) = 3$

Do $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x = 1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$ nên hàm số liên tục phải tại điểm $x = 1$. **Chọn A.**

Câu 38: Ta có $f(3) = 3, \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x-2) = 1$

Để hàm số liên tục tại điểm $x = 3$ thì $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow a = 1$. **Chọn B.**

Câu 39: Hàm số đã cho liên tục với mọi $x \neq 1$

Ta có: $f(1) = m+1, \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\sqrt[3]{x}-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\sqrt[3]{x}-2+1-x}{x-1}$

$$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x1}\right)} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} - 1\right) = \dfrac{2}{3} - 1 = \dfrac{-1}{3}$$

Để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ thì $m + 1 = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$. **Chọn A.**

Câu 40: Ta có: $f(1) = 3 + m$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2(x-1)+2(x-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+2)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2) = 3$

Để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ thì $3 + m = 3 \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn A.**

Câu 41: Ta có $f(0) = 2a - \dfrac{5}{4}$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+4-4}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \dfrac{1}{4}$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$ thì $2a - \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2a = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$. **Chọn D.**

Câu 42: Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

Lại có $f(1) = a$, để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$ thì $a = 2$. **Chọn C.**

Câu 43: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)=m+m+\dfrac{1}{4}=2m+\dfrac{1}{4}$

Lại có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{5x-1-4}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{5\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}=\dfrac{5}{4}$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại điểm $x=1$

Khi đó $2m+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 44: Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x-2\right)=-1$

Hàm số đã cho liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow m=-1$. **Chọn A.**

Câu 45: Hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$ bị gián đoạn tại $x=1$. **Chọn B**.

Câu 46: $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x+3\right)=5$

Và $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-2ax+1\right)=1-4a;\ f\left(2\right)=-2a.2+1=1-4a$

Hàm số đã cho liên tục tại $x=2$ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow 1-4a=5\Leftrightarrow a=-1$. **Chọn C.**

Câu 47: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x+1\right)=3$;

Và $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+m\right)=m+4;\ f\left(2\right)=m+4$

Hàm số đã cho liên tục tại $x=2$ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow m+4=3\Leftrightarrow m=-1$. **Chọn A.**

Câu 48: Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\ f\left(0\right)=a$

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow a=1$. **Chọn A.**

Câu 49: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+m\right)=4+m;$

Và $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x-1\right)=5;\ f\left(2\right)=4+m;$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow m+4=5\Leftrightarrow m=1$. **Chọn B.**

Câu 50: Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $\left(-\infty;3\right),\left(3;+\infty\right)$

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3x^2-7x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(3x+2\right)=3.3+2=11$;

Và $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2+5mx+2\right)=15m+11;\ f(2)=15m+11$

Hàm số liên tục tại $x=3$ khi $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)\Leftrightarrow 15m+11=11\Leftrightarrow m=0$

Vậy $m=0$ là giá trị để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn D**

Câu 51: Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4};$

Và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2m-\dfrac{5}{4}x\right)=2m;\ f(0)=2m$

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2m=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{8}$. **Chọn C.**

Câu 52: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2};$

Và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax-\dfrac{1}{2}\right)=a-\dfrac{1}{2};\ f(1)=a-\dfrac{1}{2}$

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=1$. **Chọn C**

Câu 53: Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty;4)$, $(4;+\infty)$

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)=8;$

Và $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(mx+1)=4m+1;\ f(4)=4m+1$

Hàm số liên tục tại $x=4$ khi $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)\Leftrightarrow 4m+1=8\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$

Vậy $m=\dfrac{7}{4}$ là giá trị để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 54: Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2;\ f(1)=m$

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=1$. **Chọn C.**

Câu 55: Ta có $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}=f\left(\sqrt{3}\right)$

Suy ra hàm số đã cho liên tục tại $x=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn B**.

Câu 56: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=1;$

Và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2m+1)=2m+1;$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\Leftrightarrow 2m+1=1\Leftrightarrow m=0$. **Chọn A.**

Câu 57: Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=1;$

Và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-mx)=2-2m;$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\Leftrightarrow 2-2m=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ là giá trị để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 58: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)=-2$

Lại có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(6Px-3)=f(1)=6P-3$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi hàm số liên tục tại $x=1$

Khi đó $-2=6P-3\Leftrightarrow P=\dfrac{1}{6}$. **Chọn C.**

Câu 59: Ta có $f(1)=2a-1$

Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại điểm $x=1$

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=2a-1(*)$

Suy ra $x^2+ax+b=(x-1)(x-b)\Rightarrow a=-1-b(1)$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x-b)=2a-1\Leftrightarrow 1-b=2a-1\,(2)$

Giải hệ (1) và (2) ta được $\begin{cases}a=3\\ b=-4\end{cases}\Rightarrow a-b=7$. **Chọn D.**

Câu 60: Ta có $f(1)=8+a^2$, mặt khác $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(ax+2)(x-1)}{x+3-4}.\left(\sqrt{x+3}+2\right)=\lim\limits_{x\to 1}(ax+2).\left(\sqrt{x+3}+2\right)=4(a+2)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=1$ khi $8+a^2=4(a+2)\Leftrightarrow a^2-4a=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=4\end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của tham số a. **Chọn D.**

Câu 61: Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+a-1)=a-1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+2x-1}{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$

Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0 \Leftrightarrow a-1=1 \Leftrightarrow a=2$. **Chọn C.**

Câu 62: Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(mx+1)=4m+1$

Lại có: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)=8$

Để hàm số liên tục tại điểm $x=4$ thì $4m+1=8 \Leftrightarrow m=\frac{7}{4}$. **Chọn D.**

Câu 63: Ta có $f(2)=2m+1, \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0=2$ thì $2m+1=12 \Leftrightarrow m=\frac{11}{2}$. **Chọn C.**

Câu 64: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+mx)=1+m$

Lại có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=1$ thì $m+1=\frac{1}{4} \Leftrightarrow m=\frac{-3}{4}$. **Chọn A.**

Câu 65: Ta có $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4.\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

Suy ra hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại điểm $x=0$. **Chọn D.**

Câu 66: Ta có $f(0)=3, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x+1-1}{x(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)}=\frac{4}{2(2a+1)}=\frac{2}{2a+1}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=0$ khi $\frac{2}{2a+1}=3 \Leftrightarrow a=\frac{-1}{6}$. **Chọn C.**

Câu 67: Ta có $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}-m\right)=-m$

Mặt khác $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(mx+1)=1$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi hàm số liên tục tại điểm $x=0$ suy ra $-m=1\Leftrightarrow m=-1$. **Chọn C.**

Câu 68: Ta có $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2, \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\sin(\pi x)=\sin\pi=0$

Suy ra hàm số không liên tục tại điểm $x=1$

Lại có $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\sin\pi x=\sin(-\pi)=0,\ \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(x+1)=0$

Do đó hàm số liên tục tại điểm $x=-1$. **Chọn C.**

Câu 69: Ta có $\lim_{x\to4^-} f(x)=f(4)=12-m$

Lại có: $\lim_{x\to4^+} f(x)=\lim_{x\to4^+}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4^+}\frac{(x-4)(x+4)}{\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}}=\lim_{x\to4^+}(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)=32$

Hàm số liên tục tại điểm $x=4$ khi $12-m=32\Leftrightarrow m=-20$. **Chọn B.**

Câu 70: Ta có $f(4)=a+2,\ \lim_{x\to4} f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{2x+1-(x+5)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{6}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=4$ khi $a+2=\frac{1}{6}\Leftrightarrow a=-\frac{11}{6}$. **Chọn B.**

Câu 71: Ta có $\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(a+\frac{1-x}{2+x}\right)=a+\frac{-1}{4}=f(2)$

Mặt khác $\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\left|(x-2)(2x-3)\right|}{(x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{(2-x)\left|2x-3\right|}{x-2}$

$=\lim_{x\to2^-}-\left(\left|2x-3\right|\right)=-1$

Hàm số liên tục tại điểm $x=2$ khi $a+\frac{-1}{4}=-1\Leftrightarrow a=\frac{-3}{4}$.

Bất phương trình $-x^2+ax+\frac{7}{4}>0\Leftrightarrow -x^2-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}>0\Leftrightarrow -\frac{7}{4}<x<1$

Kết hợp $x\in Z\Rightarrow x=\{-1;0\}$. **Chọn D**

Câu 72: Ta có $f(2)=m,\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

Để hàm số liên tục tại điểm $x=2$ thì $m=3$. **Chọn A.**

Câu 73: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x_0)=0$ $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Mệnh đề (1) và (2) đúng và mệnh đề (3) sai. **Chọn D.**

Câu 74: Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}\to$ A đúng.

Ta có $\begin{cases} f(-1)=-1<0\\ f(-2)=23>0\end{cases}\to f(x)=0$ có nghiệm x_1 trên $(-2;1)$, mà

$(-2;-1)\subset(-2;0)\subset(-\infty;1)\to$ B sai và C đúng. **Chọn B.**

Câu 75: Xét hàm số $f(x)=2x^4-5x^2+x+1$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-1)=-3, f(1)=-1, f(0)=1$

Do đó $\begin{cases} f(0).f(1)<0\\ f(0).f(-1)<0\end{cases}\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$

Do đó các khẳng định A, B,C sai. **Chọn D.**

Câu 76: Hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2)=-3, f(-1)=1, f(0)=-1, f(2)=2$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên mỗi khoảng $(-2;1)$, $(1;0)$, $(0;2)$

Mà phương trình $f(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm nên nó có 3 nghiệm. **Chọn D.**

Câu 77: Ta có $f(x)=5\Leftrightarrow g(x)=f(x)-5=0$

Mặt khác $g(-1)=f(-1)-5=-3<0$ và $g(4)=f(4)-5=2>0$

Suy ra phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $[-1;4]$. **Chọn B.**

Câu 78: Đặt $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, để phương trình có nghiệm $x_1<-1$ thì $f(-1)>0$

$\Leftrightarrow -1-3-2m+2+m-3>0\Leftrightarrow -m-5>0\Leftrightarrow m<-5$

Lại có $f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} - m + 1 + m - 3 = \frac{-23}{8} < 0$ và $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Do đó với $m < -5$ thì phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Kết hợp $m \in Z, m \in (-10;10) \Rightarrow m = \{-9;-8;-7;-6\}$. **Chọn C.**